Diskretno traganje za optimumom

Marina Slišković

Jeste li se susretali sa zadatcima u kojima je potrebno odrediti "najveći ili najmanji mogući broj nečega"? Primjerice, najveći prosti broj manji od 10000? Ili najmanji prirodni broj koji ima barem 3 djelitelja? Za rješavanje ovih dvaju zadatka vam i ne treba neka naročito čuvana tajna (dobro, za prvi je potreban malo veći šalabahter... ☺), ali se pri njihovu rješavanju koristimo strategijom koja je često korisna pri rješavanju (naizgled) mnogo zahtjevnijih zadataka. Naravno da znate pronaći najmanji prirodan broj koji ima barem 3 djelitelja, ali kada bi se taj zadatak pojavio na natjecanju (dobro, na testu), morali biste to i dokazati. Dakle, jednostavno biste provjerili sve brojeve manje od 4 i na taj način dokazali da je to "prvi" takav broj. Slično se rješavaju i ostali zadatci tog tipa. Dakle, može se reći da se rješavaju u dvije faze: fazi ***ograničavanja*** i fazi ***konstrukcije*** (***dokazivanja***).

- U fazi ograničavanja pokušavamo nekom metodom naći ***gornju*** (ili *donju*) ***ogradu*** m za koju je traženi broj manji (ili veći) od te ograde.

- U fazi dokazivanja pokušavamo konstruirati (s dokazom) slučaj kada ta ograda zadovoljava.

Ovu metodu zovemo ***diskretno optimiziranje***.

Slijedi jedan laki primjer.

Primjer 1. Odredi najmanji broj koji je djeljiv s 3 i 2, a da mu je zbroj znamenki 3.

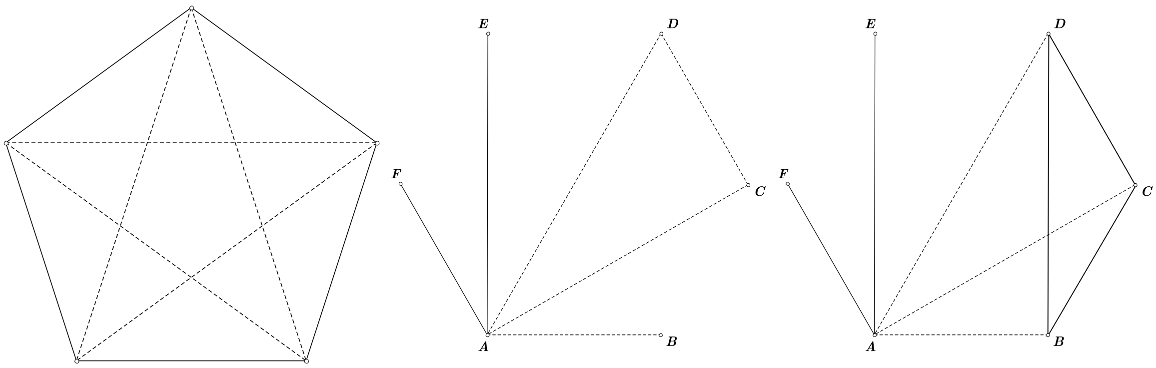
Rješenje. Očito je taj broj djeljiv s 6. Stoga nam je donja ograda 6 tj. traženi broj mora biti barem 6. No 6 ne zadovoljava to svojstvo pa nam je iduća gornja ograda 12. Broju 12 je zbroj znamenki 3 pa je on traženi broj. ✓

Pogledajmo još jedan poznati primjer.

Primjer 2. Koliko ljudi mora najmanje biti u nekom društvu tako da sigurno znamo da se među njima nalaze ili 3 međusobna poznanika ili 3 međusobna neznanca.

Rješenje. Očito u tom društvu broj ljudi mora biti barem 3. Među 3, 4 i 5 ljudi ne mora postojati trojka koja se međusobno poznaje ili ne poznaje. (Za 5 ljudi dan je graf na slici 1., s koje je vidljivo da ne postoji takva trojka.) Što je s brojem 6? Među 6 ljudi postoji traženi trojac. Tvrdnju ćemo dokazati **Dirichletovim pravilom**[1]. Označimo ljude kao točke A, B, C, D, E, F u ravnini. Između vrhova povucimo punu crtu ako se osobe međusobno poznaju ili isprekidanu crtu u suprotnom slučaju. Promatrajmo neki vrh (recimo A). Iz tog vrha izlaze barem 3 crte istog tipa, recimo isprekidana do vrhova B, C, D. Ako je jedna od crta BC, CD ili DB isprekidana onda imamo trokut kojem su stranice isprekidane, u suprotnom je trokut BCD punocrtan. ✓

[1] Za više vidi knjigu: *Mario Krnić:* **Dirichletovo pravilo**, HMD, 2001.



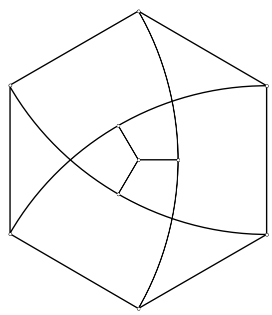
Slika 1. *Poznavanje u društvu*

Primjer 3. U kraljevstvu žive 32 viteza. Neki od njih su sluge drugih. Sluga može imati samo jednog gospodara i svaki je gospodar bogatiji od bilo kojeg svog sluge. Vitez koji ima barem 4 sluge zove se barun. Koji je najveći mogući broj baruna koji žive u kraljevstvu?

Rješenje. OGRANIČAVANJE: Najbogatiji vitez ne može biti sluga. Slijedi da najviše 31 vitez može postati sluga. Svaki može imati najviše jednog gospodara pa je najveći mogući broj baruna 7. ($7 \cdot 4 + 3 = 31$, $7 \cdot 5 > 31$)
DOKAZIVANJE: Neka 32 viteza imaju različita bogatstva i ovisno o tome označimo ih brojevima od 1 do 32, od najbogatijeg do najsiromašnijeg. Za $n = 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$ neka je $n - ti$ vitez gospodar vitezova $n + 1, n + 2, n + 3$ i $n + 4$. Pretpostavka je zadovoljena, tj. postoji 7 vitezova koji su baruni. ✓

Primjer 4. U nekoj je državi sustav zračnih linija takav da je svaki grad povezan linijama s najviše 3 druga grada i da je iz bilo kojeg grada moguće doći u bilo koji drugi grad presjedajući najviše jedanput. Koliki je najveći mogući broj gradova u toj državi?

Rješenje. Počevši od grada A u toj državi možemo doći do najviše 3 grada bez presjedanja. Počevši od bilo kojeg od tih triju gradova, možemo doći do najviše 2 druga grada (ne računajući grad A). Dakle, broj gradova u državi ne prelazi $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$.
Potrebno je još dokazati da postoji raspored linija takav da je moguće postići takvu vezu među 10 gradova. Raspored je dan na slici 2. ✓



Slika 2. *Zrakoplovne linije*

Primjer 5. (DRŽAVNO 2. R. 2003.) Koliko najmanje brojeva može imati skup A prirodnih brojeva, od kojih je najmanji jednak 1, najveći 100 i ima svojstvo da je svaki broj iz A, osim 1, jednak zbroju dvaju (jednakih ili različitih) brojeva iz A.

Rješenje. Neka su $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_n = 100$ elementi od A. Iz danih uvjeta vrijedi $k_{i+1} \leq 2k_i$, za svaki i. Koristeći ovaj rezultat, dobivamo

$$100 = k_n \leq 2k_{n-1} \leq 2^2 k_{n-2} \leq \cdots \leq 2^{n-1}k_1 = 2^{n-1}.$$

Znači $n \geq 8$. Pokazat ćemo da $n = 8$ nije moguće. Ako je $k_8 = 100$, tada iz $k_7 + k_6 \leq 64 + 32 < 100$ slijedi $k_8 = 2k_7$, tj. $k_7 = 50$. Sada na isti način, iz $k_6 + k_5 \leq 32 + 16 < 50$, dobivamo $k_6 = 25$. Ponovo $k_5 + k_4 \leq 16 + 8 < 25$, ali $2k_5 \neq 25$, dakle k_6 se ne može prikazati kao zbroj dvaju brojeva iz A. Za $n = 9$ ima više mogućnosti. Recimo

$$\{1, 2, 3, 6, 12, 13, 25, 50, 100\},\ \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 36, 64, 100\}.$$

✓

Primjer 6. Dvorac ima oblik jednakostraničnog trokuta duljine stranice 100 m. Podijeljen je na 100 trokutastih dvorana od kojih svaka ima stranice duljine 10 m. (Četvrtina dvorca prikazana je na slici 3.)
U sredini zida između bilo kojih dviju dvorana su vrata. Ako posjetitelj dvorca može proći kroz svaku dvoranu točno jednom, odredi najveći broj dvorana koje posjetitelj može obići u jednom posjetu.

Rješenje. Dokazat ćemo općenitiju verziju problema kada je broj dvorana jednak k^2 umjesto 100 ($k \in \mathbb{N}$).
Obojimo dvorane crno-bijelo kako je prikazano.
Kad bismo na kraju svakog "reda" dodali po još jednu bijelu dvoranu, u svakom bi redku bilo jednako bijelih i crnih dvorana. Zato je broj bijelih dvorana

$$k^2 - \frac{1}{2}(k^2 + k) = \frac{1}{2}(k^2 - k).$$

Kada posjetitelj hoda dvorcem, uvijek ide iz dvorane jedne u dvoranu druge boje (iz crne u bijelu i obrnuto).
Budući da posjetitelj može posjetiti sve bijele dvorane, može posjetiti najviše $[\frac{1}{2}(k^2 - k) + 1]$ crnih dvorana (počinje obilazak u crnoj dvorani), tj. ukupno

$$\frac{1}{2}(k^2 - k) + \frac{1}{2}(k^2 - k) + 1 = k^2 - k + 1.$$

Dakle, u našem slučaju posjetitelj u jednom obilasku može posjetiti najviše 91 dvoranu. ✓

Slika 3. *Tlocrt dvorana u dvorcu*

Zadatak 1. Nađi najmanji mogući broj elemenata koje je potrebno otkloniti iz skupa $\{2, 3, 4, \ldots, 1993\}$ tako da umnožak svaka 2 elementa preostalog skupa S nije element tog skupa.
Zadatak 2. Nađi najveći mogući prirodan broj n takav da se može pronaći n uzastopnih prirodnih brojeva među kojima ne postoji broj kojem je zbroj znamenaka djeljiv brojem 11.

RJEŠENJA ZADATAKA NA STRANICI 61.